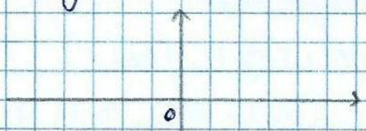
Risoluzione di problemi descritti dall'equazione delle onde

Il terzo tipo di equazioni differenziali del secondo ordine che affrontiamo è quello delle iperboliche.

Esempio 1: retta infinita

Immaginiamo di avere un filo di lunghezza infinita:



$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Con la tecnica di separazione delle variabili si giunge alla soluzione attraverso la trasformata di Fourier. Tuttavia d'Alembert riuscì a trovare, caso più unico che raro, l'integrale generale indipendente da qualsiasi tipo di condizione. Intraprendiamo questa strada chiamando:

$$\begin{cases} x - \alpha t = u \\ x + \alpha t = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ t = \dfrac{v-u}{2\alpha} \end{cases}$$

u e v sono dette coordinate caratteristiche

Consideriamo lo jacobiano, cioè le derivate:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha\frac{\partial f}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\det J = 2\alpha$$

L'equazione con φ diviene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\varphi - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\varphi - \frac{1}{\alpha^2}\left(-\alpha\frac{\partial}{\partial u} + \alpha\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\alpha\frac{\partial}{\partial u} + \alpha\frac{\partial}{\partial v}\right)\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) - \left(-\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial}{\partial v}\varphi(u,v)\right] = 0$$

È l'equazione di d'Alembert. Integriamo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = F(v) \Rightarrow \varphi(u,v) = \int F(v)\, dv + G(u) = A(v) + G(u)$$

$$\Rightarrow \varphi(x,t) = A(x+\alpha t) + G(x-\alpha t)$$

È l'integrale generale dell'equazione delle onde. Se $\varphi(x,t) = A(x+\alpha t)$ l'onda parte dalla posizione iniziale $\varphi(x,0) = A(x)$ spostandosi verso sinistra e mantenendo sempre il suo profilo. L'onda descritta da $G(x-\alpha t)$ è uguale, ma si sposta verso destra.

La velocità è (uguale in modulo per A e G, differente per il verso):

$$\tilde{x} = x + \alpha t \Rightarrow \Delta x = \alpha t \Rightarrow v = \frac{\alpha t}{t} = \alpha, \quad \text{ma} \quad \frac{1}{\alpha^2} = \mu/T = \frac{1}{v^2}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{T/\mu}, \quad v^2 = T/\mu$$

Se il filo, come realisticamente accade, non è infinito, le due onde raggiungono le estremità e tornano indietro, riflesse.
Sempre rimanendo sul filo infinito imponiamo alcune condizioni $(-\infty < x < +\infty)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \\ \varphi(x,0) = f(x) \\ \dot{\varphi}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

L'onda si sposta verso ∞ senza mai esaurirsi. Abbiamo:

$$\varphi(x,0) = A(x) + G(x) = f(x)$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0) = v \cdot A'(x) - v \cdot G'(x) = g(x)$$

Pertanto si ottiene:

$$G(x) = f(x) - A(x) \Rightarrow v\, A'(x) - v\left(f'(x) - A'(x)\right) = g(x)$$
$$\Rightarrow 2v\, A'(x) = g(x) + v f'(x) \Rightarrow A'(x) = \frac{1}{2} f'(x) + \frac{1}{2v} g(x)$$

Integrando:

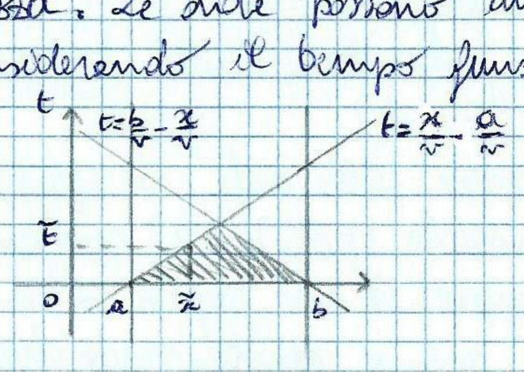
$$A(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2v}\int_0^x g(s)\, ds + C \Rightarrow G(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2v}\int_0^x g(s)\, ds - C$$
$$\Rightarrow \varphi(x,t) = \frac{1}{2} f(x+vt) + \frac{1}{2v}\int_0^{x+vt} g(s)\, ds + C + \frac{1}{2} f(x-vt) - \frac{1}{2v}\int_0^{x-vt} g(s)\, ds - C =$$
$$= \frac{1}{2}\left[f(x+vt) + f(x-vt)\right] + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} g(s)\, ds$$

Per le onde marine si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ u(x,0) = Q\, f(x) \\ \dot{u}(x,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = \frac{Q}{2}\,\delta(x - vt) + \frac{Q}{2}\,\delta(x + vt)$$

L'onda (le due onde, in realtà) è inizialmente singolare e si dirige verso ∞ mantenendo la singolarità.

Torniamo ora al problema con le $f(x)$ e $g(x)$ limitandoci però ad un intervallo $a \le x \le b$. È come se osservassimo una porzione dello sviluppo di un fiume, un tratto della sua lunghezza. Le onde possono andare o venire da destra o sinistra. Considerando il tempo funzione di x, $t = mx + n$:

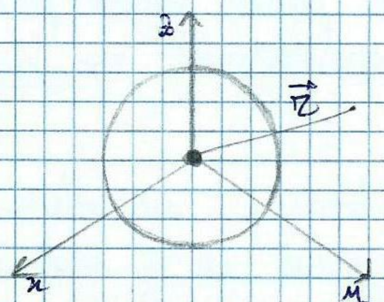


La soluzione è unica per i punti sulla retta $t = \frac{x}{v} - \frac{a}{v}$ se l'onda viene da sinistra, sulla retta $t = \frac{b}{v} - \frac{x}{v}$ se l'onda viene da destra.

Le due rette delimitano insieme al segmento $a\,b$, un triangolo in cui è garantita l'unicità degli eventi (effetti che dipendono da spazio e tempo). Scrivendo $a = x - vt$ e $b = x + vt$ si ottengono le coordinate caratteristiche. Il triangolo è detto "caratteristico di Cauchy". In esso si trova la soluzione delle equazioni, ciascuna risolta in modo unico. [illegible] le rette che sono chiamate orizzonti e costituiscono l'orizzonte degli eventi.

Esempio 2: onde sferiche

Studiamo il caso di una sorgente puntiforme (fiammifero acceso in un punto al buio, ecc.). Si ha dipendenza dalla posizione nello spazio e la soluzione è identica in ogni direzione:



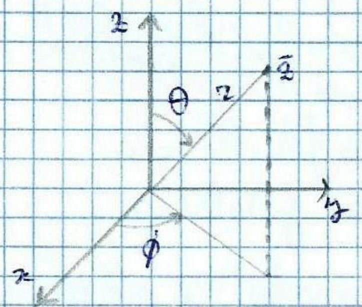
$$\varphi(\vec{r},t)=\varphi(r,t) \qquad r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Delta\varphi(\vec{r},t)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(\vec{r},t)=0$$

Usiamo il laplaciano radiale:

$$\Delta_r\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

Notiamo inoltre che:



$$\Delta_r\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varphi+r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=$$

$$=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

Quindi:

$$\Delta\varphi(r,t)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(r,t)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[r\,\varphi(r,t)\right]-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(r,t)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[r\cdot\varphi(r,t)\right]-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[r\,\varphi(r,t)\right]=0$$

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$$

Ponendo ora $u(r,t)=r\cdot\varphi(r,t)\Rightarrow\varphi(r,t)=u(r,t)/r$:

$$\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial t^2}=0$$

Abbiamo ritrovato l'equazione monodimensionale con soluzione:

$$u(r,t)=A(r-vt)+B(r+vt)\Rightarrow\varphi(r,t)=\frac{1}{r}A(r-vt)+\frac{1}{r}B(r+vt)$$

Poniamo ora le condizioni per ottenere una luce breve e intensa nell'origine:

$$\begin{cases} \Delta\varphi-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \\ \varphi(r,0)=Q\,\delta(\vec{r})=\frac{Q\,\delta(r)}{2\pi r^2} \\ \dot\varphi(r,0)=0 \end{cases} \quad \text{se } \varphi=u/r \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \\ u(r,0)=Q\frac{\delta(r)}{2\pi r}=f \\ \dot u(r,0)=g=0 \end{cases}$$

Ecco la soluzione, generica e particolare:

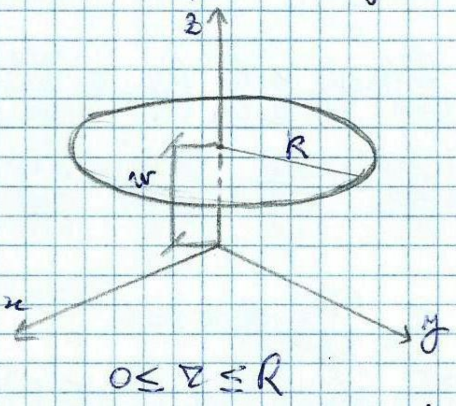
$$u(r,t) = \frac{1}{2}\left[f(r-vt)+f(r+vt)\right]+\frac{1}{2v}\int_{r-vt}^{r+vt} g(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \mu(r,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{Q}{2\pi}\,\frac{\delta(r-vt)}{r-vt}+\frac{Q}{2\pi}\,\frac{\delta(r+vt)}{r+vt}\right]$$

Sembra che ci siano due onde, una che si espande e una che si contrae. In realtà quella che si sposta verso destra non c'è poiché $\delta(r+vt)=0$, essendo sempre $r+vt>0$.
Rimane solo $\varphi(r,t) = \frac{1}{r}\,\frac{Q}{4\pi}\,\frac{\delta(r-vt)}{r-vt}$ poiché ha argomento che può annullarsi.
In un punto dello spazio vediamo la luce solo dopo che essa ha percorso il tratto che ci separa dalla sorgente, cioè dopo $t=r/v$. Il flash di luce perde pian piano energia, attenuandosi in modo proporzionale a $1/r^2$.

Esempio 3: membrana di tamburo

Poniamoci nel caso di una membrana circolare appoggiata (non può essere incastrata poiché al II ordine non si possono imporre i gradi di libertà necessari):



$$\begin{cases} \Delta w(r,\theta,t) - \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 w(r,\theta,t)}{\partial t^2} = 0 \\ w(R,\theta,t)=0 \\ w(r,\theta,0)=f(r,\theta) = 0 \\ \dot w(r,\theta,0) = g(r,\theta)=0 \end{cases}$$

$0 \le r \le R$

Come di consueto ci affidiamo alla tecnica di separazione delle variabili, $w(r,\theta,t) = A(r)\cdot B(\theta)\cdot Q(t)$:

$$A''(r)\cdot B(\theta)\cdot Q(t) + \frac{1}{r}\,A'(r)\cdot B(\theta)\cdot Q(t) + \frac{1}{r^2}\,A(r)\cdot B''(\theta)\cdot Q(t) - \frac{1}{v^2}\,A(r)\,B(\theta)\,\ddot Q(t) = 0$$

$$\Rightarrow r^2\frac{A''(r)}{A(r)} + r\,\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{r^2}{v^2}\,\frac{\ddot Q(t)}{Q(t)} = -\frac{B''(\theta)}{B(\theta)} = k = m^2$$

La soluzione ricalca quella che abbiamo visto nell'esempio 2 delle paraboliche. Infatti:

$$B_m(\theta) = a_m\cos(m\theta) + b_m\,\text{sen}(m\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{A''(r)}{A(r)} + \frac{A'(r)}{r\,A(r)} - \frac{1}{v^2}\,\frac{\ddot Q(t)}{Q(t)} = \frac{m^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{A''(r)}{A(r)} + \frac{1}{r}\,\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{m^2}{r^2} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\ddot Q(t)}{Q(t)} = K$$

Da questo punto la soluzione cambia, infatti per $Q(t)$ si ha:

$$\ddot Q(t) - K v^2 Q(t) = 0$$

Dovendo essere periodica, la soluzione prevede $k<0, k=-\frac{\omega^2}{v^2}$:

$$\ddot{Q}(t)+\omega^2 Q(t)=0 \Rightarrow Q(t)=\alpha(\omega)\cdot\cos(\omega t)+\beta(\omega)\cdot \text{sen}(\omega t)$$

Con $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$. Passando all'equazione di $A(r)$:

$$\frac{A''(r)}{A(r)}+\frac{1}{r}\cdot\frac{A'(r)}{A(r)}-\frac{m^2}{r^2}=-\frac{\omega^2}{v^2} \Rightarrow A''(r)+\frac{1}{r}A'(r)+\left[\left(\frac{\omega}{v}\right)^2-\frac{m^2}{r^2}\right]\cdot A(r)=0$$

Anche qui ricompare l'equazione di Bessel, $y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)+\left(\lambda^2-\frac{m^2}{x^2}\right)y(x)=0$ con $y(x)=A(r)$, $x=r$ e $\lambda=\frac{\omega}{v}$. Dalla soluzione generale escludiamo Y_m poiché divergente in zero:

$$A(r)=c_1 J_m\left(\frac{\omega}{v}r\right)$$

Inoltre deve essere $w(R,\theta,t)=A(R)\cdot B(\theta)\cdot Q(t)=0 \quad \forall\theta, \forall t$:

$$A(R)=0 \Rightarrow J_m\left(\frac{\omega}{v}R\right)=0 \Rightarrow \frac{\omega}{v}R=z_j^{(m)} \Rightarrow \omega_{mj}=z_j^{(m)}\frac{v}{R}$$

Le soluzioni sono infinite, ma non arbitrarie. Vale inoltre, per la frequenza, $f_{mj}=\frac{1}{2\pi R}v\cdot z_j^{(m)}$, ovvero sotto la frequenza minima (per $z_j^{(m)}=2,4$) il tamburo non può suonare.

Ecco la soluzione completa:

$$w(r,\theta,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}J_m\left(\frac{z_j^{(m)}}{R}\cdot r\right)\left[a_m\cos(m\theta)+b_m \text{sen}(m\theta)\right]\left[\alpha_{mj}\cos(\omega_{mj}t)+\beta_{mj}\text{sen}(\omega_{mj}t)\right]$$

Da cui il modo M_{mj}:

$$M_{mj}=J_m\left(z_j^{(m)}\frac{r}{R}\right)\left[a_m\cos(m\theta)+b_m \text{sen}(m\theta)\right]\left[\alpha_{mj}\cos(\omega_{mj}t)+\beta_{mj}\text{sen}(\omega_{mj}t)\right]$$

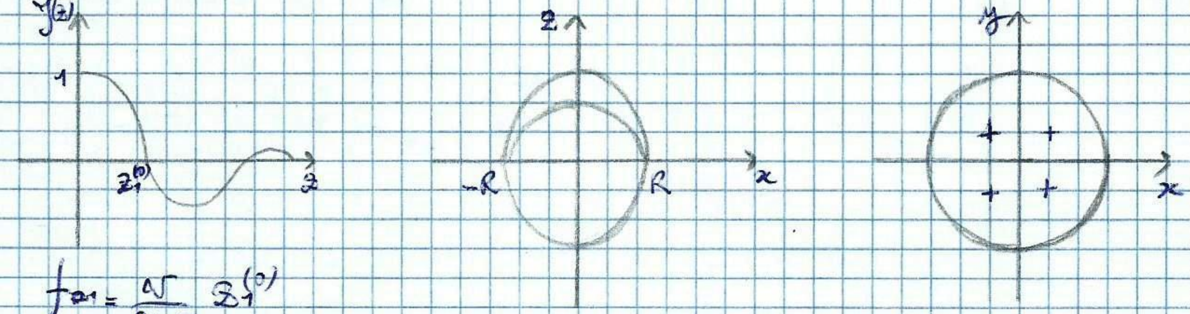
Le condizioni al bordo, per $r=R$, sono automaticamente verificate. Tralasciamo la verifica di quelle iniziali.

Ecco invece qualche spunto sull'analisi modale:

- $m=0$ e $j=1$:

$$M_{01}=J_0\left(z_1^{(0)}\frac{r}{R}\right)\cdot a_0\left[\alpha_{01}\cos(\omega_{01}t)+\beta_{01}\text{sen}(\omega_{01}t)\right]$$

La membrana si dispone lungo il tratto di J_0 da zero al primo zero $z_1^{(0)}$:



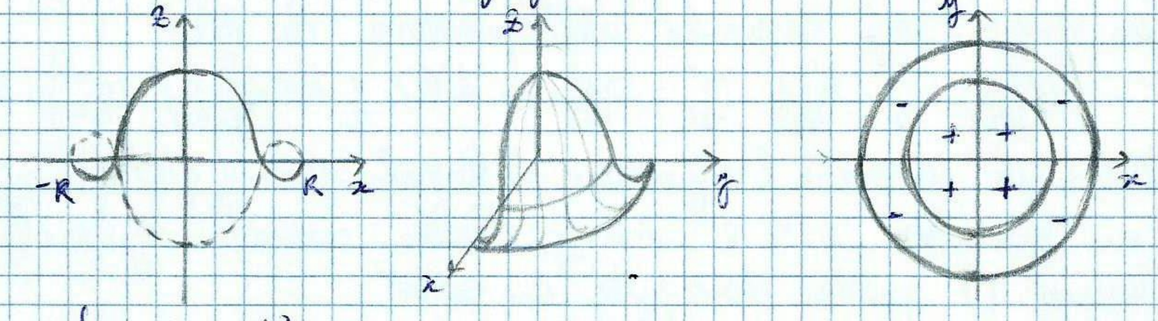
$$f_{01}=\frac{v}{2\pi R}z_1^{(0)}$$

La membrana si sposta tutta in una direzione.

- $m=0$ e $j=2$:

$$M_{02}=J_0\left(z_2^{(0)}\frac{r}{R}\right)a_0\left[\alpha_{02}\cos(\omega_{02}t)+\beta_{02}\text{sen}(\omega_{02}t)\right]$$

Questa volta si arriva al secondo zero di J_0, che tuttavia non si azzera per una $z_2^{(0)}$ doppia di $z_1^{(0)}$. Emesso una nota musicale non si ottiene quella dell'ottava superiore: il tamburo non è armonico. Graficamente:

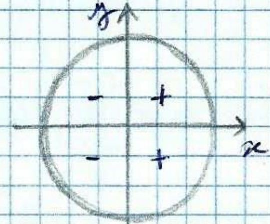


$f_{02} = \frac{v}{2\pi R} z_2^{(0)}$

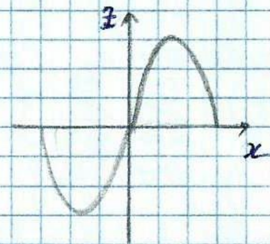
- $n=1$ e $j=1$:

$$M_{11} = J_1\left(z_1^{(1)} \frac{z}{R}\right)\left(a_{11}\cos\theta + b_{11}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\left[\alpha_{11}\cos(\omega_{11}t) + \beta_{11}\,\mathrm{sen}(\omega_{11}t)\right]$$

Poniamo per semplicità grafica $b_{11}=0$ e otteniamo che il tamburo "scende" da una parte e "sale" dall'altra:



$f_{11} = \frac{v}{2\pi R} z_1^{(1)}$



Pertanto, mentre j genera corone circolari con comportamento simmetrico rispetto a x e y, n provoca emisimmetria dividendo in spicchi metà membrana e seleziona la J_n da seguire. La grafica rende efficacemente questi due concetti. Proviamo ad esempio con M_{85}: